



TITLE:

1次元界面成長模型とSchur process(組合せ論的表現論の世界)

AUTHOR(S):

笹本, 智弘

CITATION:

笹本, 智弘. 1次元界面成長模型とSchur process(組合せ論的表現論の世界). 数理解析研究所講究録 2006, 1497: 103-113

ISSUE DATE:

2006-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58357>

RIGHT:

1次元界面成長模型と Schur process

千葉大学 理学部
笹本 智弘 (SASAMOTO Tomohiro)

概要

ある種の1次元界面成長模型の性質を調べる方法を一般化すると, Schur process と呼ばれる Schur 関数の積で与えられる weight が自然と得られる. Schur process が行列式の積の形に書けることと, Schur 関数の性質を用いる事により, 界面の同時刻多点同時分布を計算することが出来る.

1 Introduction

本稿では, 成長する界面の性質について考える. 界面の成長というのは, インクに浸した紙にインクが浸透してゆくとか, ガン細胞が段々大きくなってゆくとか, そういう様子をイメージしてもらえばよい. もちろん本稿で扱うのはそこまで現実的なものではなく, ごくごく単純なモデルであるが, 自由度が大きな相互作用系が示す現象には普遍性が期待されるので, 簡単なモデルで得られた結果から自然界で起こる実際の現象を理解するのに有用な知見を得ることが出来る.

1986年, Kardar-Parisi-Zhang は界面成長を記述するあるモデル方程式を提案した [1]. その一次元版は次のようなものである:

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, t) + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right)^2 + \eta(x, t). \quad (1.1)$$

ここで $h(x, t)$ は時刻 t , 位置 x における界面の高さであり, また $\eta(x, t)$ は

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (1.2)$$

を満たすガウシアンホワイトノイズである. Kardar らは, 繰り込み群的な考え方を適用する事により界面の性質について調べ, 揺らぎの指数などを計算した.

その後, 同じ普遍的性質を共有していると考えられる幾つかの界面成長モデルに対して厳密解が得られたが, それらは主として揺らぎの指数の計算に限られていた [2]. ところがここ数年, ある種の界面成長モデルが Young 図形の組合せ論と関係していることが分かり, 揺らぎの性質についてより詳しいことを調べる事が出来るようになって来た. その後解析方法はさらに洗練されて来て, その中で Schur process と呼ばれる weight が重要な役割を果たしている事が分って来た. 本稿では, PNG 模型と呼ばれる界面成長模型が Schur process とどのように関係しているかということを中心に解説をする.

2 PNG 模型

まず多核成長模型 (英語では polynuclear growth model. 以下略して PNG 模型) と呼ばれる 1 次元の界面成長模型を定義する. これは, 核生成 (nucleation) と左右方向への成長から成る単純な界面成長模型の一次元版である [3, 4].

PNG 模型は, 具体的には次のようなルールで定義される. 以下時刻 $t \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ と空間 $x \in \mathbb{Z}$ は離散的とする. 最初時刻 $t = 0$ の時, 界面は真っ平らとする. そして時刻 $t = 1$ の直前までは何も起こらない. 時刻 $t = 1$ では原点で核生成が起こり, その高さ ($w_{1,1}$ とおく) は, パラメータ q ($0 < q < 1$) の幾何分布に従って生成されるものとする: $\mathbb{P}[w_{1,1} = k] = (1-q)q^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). 図の例では $w_{1,1} = 1$ となっており, これは確率 $(1-q)q$ で起こる. 上で核生成が「起こる」と書いたが, これは高さ 0 の核生成も含めた言い方で, もちろん確率 $1-q$ で核生成は「起こらない」と言ってもよい. 核生成は高さ方向への界面の成長であるが, 次に $t = 2$ の直前までに左右 (x 軸の正負方向) へ幅 1 の成長が起こるとする. こちらの成長は確率的な要素は無く, 決定論的である. 次に $t = 2$ では $x = \pm 1$ で核生成が起こる. $x = -1, x = 1$ での核生成の高さをそれぞれ $w_{1,2}, w_{2,1}$ とする. $w_{1,2}, w_{2,1}$ は確率変数で, 独立に各々 $w_{1,1}$ の時と同じパラメータ q の幾何分布に従って生成されるものとする. 次に時刻 $t = 3$ の直前までに左右方向へ幅 1 の決定論的成長がおこる. 今回は原点での高さをどうするか (今の例では 2 とするか 3 とするか) 迷うが, 高い方優先 (今の例では 3 とする) というルールにする. 次に時刻 $t = 3$ では $x = 0, \pm 1$ で核生成が確率的に起こる... というように以下の時刻でも同様に続けて行く. これが PNG 模型である. 今は空間も時間も離散的なバージョンで話をしていたが, 時空が連続のバージョンの方が先に考えられていた.

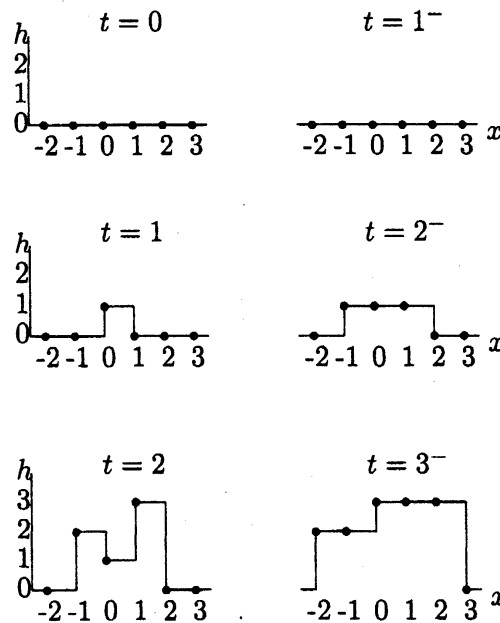


図 1: PNG 模型のルール

しばらく時間が経った後どのような状況になるのか見るためにコンピュータシミュレーションを行ってみると, 図2のような絵が得られる. この場合は液滴 (droplet) の様な形が得られるので droplet の場合と呼ばれる.

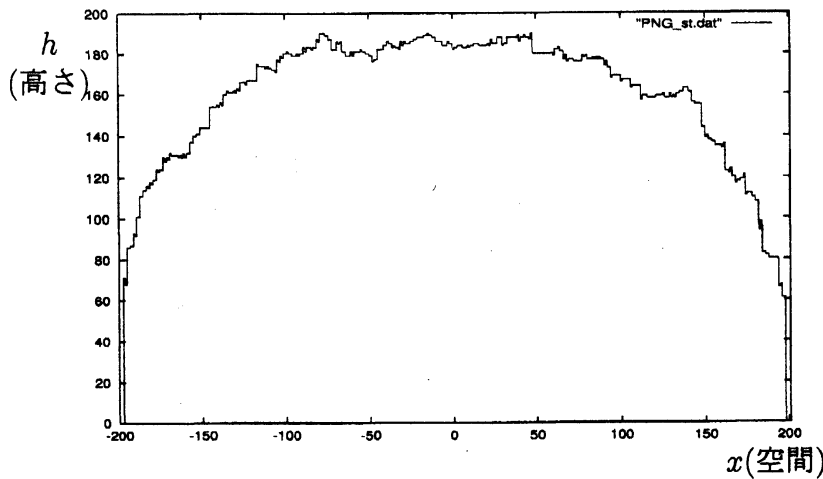


図 2: droplet 成長

我々が問題とするのは, この1次元的な界面の形についての性質である. まず平均的な事については, Rost [5] などでもかなり前から調べられていたが, ここ数年で揺らぎの性質まで精密に分るようになってきた. まず今の droplet 成長の場合の原点での高さ揺らぎについては, 次のような結果が得られた [6]. 原点でのスケールされた高さを

$$H_t(0) = \frac{h(x=0, t) - at/2}{d(t/2)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.1)$$

で定義する. ただし

$$a = \frac{2\sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}}, \quad d = \frac{(1 + \sqrt{q})^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}}}{1 - \sqrt{q}}. \quad (2.2)$$

スケールされた高さを (2.1) のように定義するというのは, 高さは平均的には大体 $at/2$ の所に来ることと, そのまわりの揺らぎが t が大きいとき $O(t^{1/3})$ 位であることを示している. この時

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[H_t \leq s] = F_2(s) \quad (2.3)$$

という式が成り立つ. ここで右辺に現れた $F_2(s)$ は次のような表示を持つ関数である:

$$F_2(s) = \exp \left[- \int_s^\infty (x - s) u(x)^2 dx \right]. \quad (2.4)$$

ただし $u(x)$ は II 型の Painlevé 方程式 (の特別な場合),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 2u^3 + xu, \quad (2.5)$$

の解で,

$$u(x) \sim \text{Ai}(x), \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.6)$$

とう漸近形を満たすものである. この $F_2(s)$ という関数は, 最初 GUE (Gaussian Unitary Ensemble) と呼ばれるランダム行列アンサンブルの最大固有値の分布として現れたものである [8].

この結果は, 今考えている問題が Young 盤の統計的な性質と関係している事を用いて示された. 本稿の中でその証明を再現することはしないが, 基本となるのは $w_{i,j}$ を図 3 のように並べて書いてみる事である. (図では $i+j \leq 3$ までしか埋めていないが, 全ての (i,j) ($i, j = 1, 2, \dots$) に非負整数が埋まっている状態を考えて欲しい.) PNG 模型の時刻 t と空間 x の軸は図にあるように i, j 軸を 45 度ずらした方向に取る. より正確には, $t = i + j - 1, x = i - j$ である. さらに時刻 t (簡単のため奇数とする) での原点における界面の高さは, PNG 模型のルールを考えると, $w_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq (t+1)/2$) だけで決まっていることがわかる. そして $\{w_{i,j} | 1 \leq i, j \leq (t+1)/2\}$ は非負整数を要素とする正方行列とみなす事ができ, RSK 対応により Young 盤と関係して来るのである [9]. この辺りの事に関してより詳しくは [6] や [7] を参考にして欲しい.

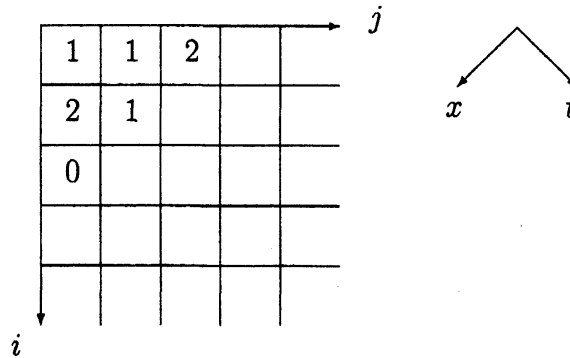


図 3: $w_{i,j}$ の表

3 多層 PNG 模型

次に同時刻における空間的に離れた 2 点の高さの揺らぎの同時分布について考える. これは物理的には界面がどの程度荒れているかという事に関係する. 2 点の同時分布 (あるいはより一般に多点の同時分布) を計算するには, 多層版 PNG 模型を導入するよい. これは Prähofer-Spohn [10] や Johansson [4] のアイディアで, 元々考えている界面の下に無限個の仮想的界面を構成する. 仮想的界面は最初時刻 $t = 0$ では高さ $-1, -2, \dots$ で真っ平らとし, その後の時間発展は, 一つ上の界面で図 1 の $t = 2^-$ の時起こったような「高い方優先ルール」を用いた際, (高い方の高さ)-(低い方の高さ) 分の核生成が起こり, それはその後左右に成長をする, というようなものである. ポイントは, 元のモデルでは高い方優先ルールで失う過去に起こった核生成の情報を, 多層化することでずっと保持できるようにしたことである. しばらく時間が経った後の様子を見るためにコンピュータシミュレーションを行ってみると, 図 4 のような絵が得られる.

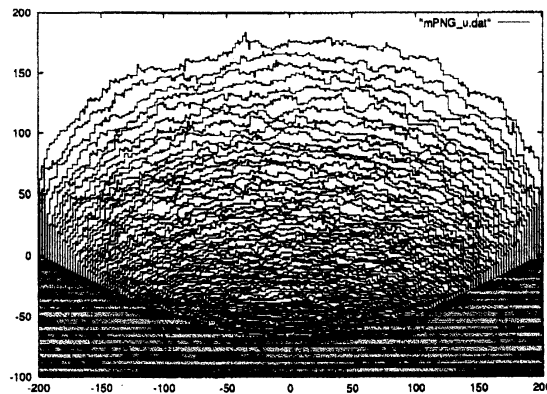


図 4: 多層 PNG 模型

この図は、横軸を時刻、縦軸を空間とみなすことにすると、大体同じ所からスタートした多数の粒子が、同じ場所には来れないという制限のもとでランダムウォークをし、最後にはまた大体同じ場所に戻って来ている、と見ることも出来る。これは統計物理学においては vicious walk と呼ばれていたものの仲間であり、上から n 層の配位の重みは、

$$\prod_{r=-2N+1}^{2N-2} \det(\phi_{r,r+1}(x_i^r, x_j^{r+1}))_{i,j=1}^n \quad (3.1)$$

という形に与えられる。ただしここで $t = 2N - 1$ ($N \in \mathbb{N}$) として、上から i 番目の層の高さを $h^i(t = 2N - 1, x = r) = x_i^r$ としてある。また行列式の中の関数 ϕ は

$$\phi_{2j-1,2j}(x, y) = \begin{cases} (1 - \sqrt{q})q^{\frac{y-x}{2}} & y \geq x \\ 0 & y < x \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\phi_{2j,2j+1}(x, y) = \begin{cases} 0 & y > x \\ (1 - \sqrt{q})q^{\frac{y-x}{2}} & y \leq x \end{cases} \quad (3.3)$$

である。多層界面の配位の重みがこのように具体的に書き下すことが出来るということが多層化のメリットである。後はこの weight の下で、一番上の粒子の位置についての情報を取り出せば良いことになる。その解析には少しずつ異なったは何通りかの方法があるが、本稿では上の weight がより一般的な Schur process の特別な場合とみなすことが出来る事を用いる。

Schur process の話に移る前に、モデルを少し一般化しておく。各格子点に非負整数 $w_{i,j}$ が埋まっている状況 (図 3) を思い出そう。各時刻各点での核生成は確率的だったが、これは図で $w_{i,j}$ は各々確率的に埋まっているということである。より具体的には、各格子点に非負整数 k が埋まる確率は独立に、 $\mathbb{P}(w_{i,j} = k) = (1 - q)q^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である。これはモデルの空間一様性という点からは自然であるが、解析を進める際の手法の

点からは特に必要ではない. 解析の途中までは, 幾何分布のパラメータを一般化して

$$\mathbb{P}(w_{i,j} = k) = (1 - a_i b_j)(a_i b_j)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

とした場合を考えてもほとんど変わらない. $a_i = b_j = \sqrt{q}$ という特別な場合が元々の PNG モデルである. この場合にも多層 PNG 模型を考えることが出来るが, その際の weight は, 上と同じ形で, 関数 ϕ が次のように一般化されるだけである:

$$\phi_{2j-1, 2j}(x, y) = \begin{cases} (1 - a_{j+N})a_{j+N}^{y-x} & y \geq x \\ 0 & y < x \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\phi_{2j, 2j+1}(x, y) = \begin{cases} 0 & y > x \\ (1 - b_{N-j})b_{N-j}^{y-x} & y \leq x \end{cases} \quad (3.6)$$

4 Schur process

唐突であるが, 分割の列

$$\phi \subset \lambda^{(1)} \supset \mu^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \supset \mu^{(2)} \subset \dots \supset \mu^{(T)} \subset \lambda^{(T)} \supset \phi \quad (4.1)$$

を考え, この上の確率測度で

$$\text{const.} s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) s_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^-) s_{\lambda^{(2)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^+) \cdots s_{\lambda^{(T)}/\mu^{(T-1)}}(\rho_{T-1}^+) s_{\lambda^{(T)}}(\rho_T^-) \quad (4.2)$$

という形のものを Schur process と呼ぶことにする [11, 12].

ただし s_λ は Schur 関数, $s_{\lambda/\mu}$ は skew Schur 関数, そして ρ_i^\pm は適当な specialization である. 以下 (skew)Schur 関数の定義やそれらの性質を使うが, それらについては [9] や [13] 等を参照して欲しい.

さて h_l を完全同次対称関数とすると, Jacobi-Trudi 公式

$$s_{\lambda/\mu} = \det[h_{l_i - m_j}]_{i,j=1}^N \quad (4.3)$$

(ただし $l_i = \lambda_i - i, m_i = \mu_i - i$) により, 上の Schur process の weight は行列要素が h_l であるような行列式の積の形に書くことが出来る. さらに $h_j(a, 0, \dots) = a^j$ となることを用いれば, $T = 2N - 1$ $\rho_i^+ = (a_{i+1}, 0, \dots), \rho_i^- = (b_{2N-i}, 0, \dots)$ の場合 Schur process は, 前節の最後に述べたパラメータを一般化した多層 PNG 模型の weight に等しくなり, さらに $a_i = b_j = \sqrt{q}$ とおけば元々の多層 PNG 模型の weight となる. (ただし l_i, m_i を適当に x_i に読み直す必要はある.) つまり PNG 模型は Schur process の特別な場合とみなせると言うことである. PNG 模型の界面の高さは, Schur 関数の言葉では $\lambda^{(j)}$ の一番上の行の長さ $\lambda_1^{(j)}$ に対応するので, Schur process において $\lambda_1^{(j)}$ の統計的性質を調べることになる. 特に我々は界面のモデルによらない普遍的な性質を取り出したいので, 漸近解析が行えるような表式まで持つてゆく必要があるが, Schur process については実際そのような事が可能である.

上で述べたように Schur process は

$$\text{const.} \det \phi_i(x_j^{(1)}) \det W_1(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}) \cdots \det W_{k-1}(x_i^{(k-1)}, x_j^{(k)}) \det \psi_i(x_j^{(k)}) \quad (4.4)$$

という行列式の積の形をしている事に注目する. まず簡単のため $k = 1$ の場合を考えてみると, weight は

$$\det \phi_i(x_j) \det \psi_i(x_j) \quad (4.5)$$

という形になるが, これはランダム行列理論で馴染のある形である [14]. 特に [15] にあるように, n 点相関関数 (上記 weight を $n + 1$ 番目以降の変数について積分したものの定数倍) は

$$\det K_{i,j} |_{i,j=1}^n \quad (4.6)$$

のように書くことが出来る. ただし

$$K_{i,j} = \sum_{k,l} \psi_k(x_i) (M^{-1})_{kl} \phi_l(x_j), \quad (4.7)$$

$$M_{i,j} = \sum_x \phi_i(x) \psi_j(x). \quad (4.8)$$

ここで K を相関核と呼ぶ. また全ての x_i が s 以下である確率は, 相関核 K を積分核にもつ Fredholm 行列式で与えられることも示される.

Schur process (4.2) の場合も, 行列式の積の数が増えるが基本的には同じ仕組みを一般化することができ, 相関関数 ($\rho(X)$ と書く) は

$$\rho(X) = \det K \quad (4.9)$$

という行列式の形に書くことが出来る [11]. ただしここで相関核 K は

$$K_{ij} = W_{[i,k]} \Psi M^{-1} \Phi W_{[1,j]} - W_{[i,j]}, \quad (4.10)$$

$$M = \Phi W_1 \cdots W_{k-1} \Psi, \quad (4.11)$$

$$W_{[i,j]} = \begin{cases} W_i \cdots W_{j-1} & i < j, \\ 0 & i \geq j, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\Phi_{i,j} = (\phi_i(x_j^{(1)})), \quad \Psi_{i,j} = (\psi_j(x_i^{(k)})), \quad (4.13)$$

となる. これは (4.7), (4.8) の一般化である. また $\lambda_1^{(j)}$ についての同次分布は, 同じ相関核を用いた Fredholm 行列式の形に書くことが出来る.

計算をさらに進めるには M の逆行列を求めることが必要になるが, これは一般には難しい問題である. しかし Schur process の場合は Schur 関数の「良い」性質を用いることで逆行列を求めることが可能である. まず M の行列式に関して, 次の表式を得ることが出来る:

$$\frac{\prod_{i=1}^p (x_i y_i)^p}{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (x_i - x_j)(y_i - y_j)} \det M = \prod_{0 \leq i < j \leq T} H(\rho_i^+; \rho_j^-) \quad (4.14)$$

ただし

$$H(\rho', \rho'') = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\rho') s_{\lambda}(\rho'') \quad (4.15)$$

である. また k, l を除いたものに対しては,

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 \cdots \hat{x}_k \cdots x_p y_1 \cdots \hat{y}_l \cdots y_p)^p}{\prod_{1 \leq i < j \leq p, i \neq k, j \neq l} (x_i - x_j)(y_i - y_j)} \det M \begin{pmatrix} 1 \cdots \hat{k} \cdots p \\ 1 \cdots \hat{l} \cdots p \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^p H(\rho_{[1, T-1]}^-; x_i) H(\rho_{[1, T-1]}^+; y_i) \cdot \prod_{i,j=1}^p \frac{1}{1 - x_i y_j} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq T-1} H(\rho_i^+; \rho_j^-) \\ &\quad \times \frac{\prod_{i=1}^p (1 - x_k y_i)(1 - x_i y_l)}{H(\rho_{[1, T-1]}^-; x_k) H(\rho_{[1, T-1]}^+; y_l)(1 - x_k y_l)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

という式を得ることが出来る. あとは, クラメル公式を用いることにより, M^{-1} に対する

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{lk} &= \frac{(-1)^{k+l} \det M \begin{pmatrix} 1 \cdots \hat{k} \cdots p \\ 1 \cdots \hat{l} \cdots p \end{pmatrix}}{\det M} \\ &= \frac{x_k y_l}{\prod_{i \neq k} (1 - x_i/x_k) \prod_{j \neq l} (1 - y_j/y_l)} \frac{\prod_{i=1}^p (1 - x_k y_i)(1 - x_i y_l)}{H(\rho_{[1, T-1]}^-; x_k) H(\rho_{[1, T-1]}^+; y_l)(1 - x_k y_l)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

という表式を得ることが出来る. そしてこれを (4.10) に代入してさらに計算を進めると, 相関核の積分表示

$$K(i, u; j, v) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{H(\rho_{[i, T]}^-; z) H(\rho_{[0, j]}^+; w)}{(zw - 1) H(\rho_{[0, i]}^+; z^{-1}) H(\rho_{[j, T]}^-; w^{-1})} \frac{dz dw}{z^{u+1} w^{v+1}} \quad (4.18)$$

を得ることが出来る.

5 PNG 模型の 2 点同時分布

Schur 関数の相関関数を記述する積分核が得られたので, これを特殊化して元々の PNG 模型に対応する場合を考えると, 多層 PNG 模型の相関を記述する相関核

$$K(i, u; j, v) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(1 - \sqrt{q}z)^{T-i+1} (1 - \sqrt{q}w)^j}{(zw - 1)(1 - \sqrt{q}z^{-1})^i (1 - \sqrt{q}w^{-1})^{T-j+1}} \frac{dz dw}{z^{u+1} w^{v+1}} \quad (5.1)$$

が得られる. これは [4] で得られたものと本質的に同じである.

これを用いて PNG 模型の 2 点高さ同時分布のスケリング極限を考えよう. 原点付近でのスケールされた高さ $H_t(\tau)$ を

$$H_t(\tau) = \frac{h(x = 2c(t/2)^{2/3}, t) - at/2}{d(t/2)^{1/3}} + \tau^2 \quad (5.2)$$

で定義する. ただし a, d は (2.2) で与えられ, また $c = q^{-1/6}(1 + \sqrt{q})^{2/3}$ である. このスケーリングの下で漸近解析を行うと,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[H_t(0) < X_1, H_t(\tau) < X_2] = \det(1 - K_2) \quad (5.3)$$

という結果を得ることが出来る. ただしここで右辺の K_2 はスケーリング極限における相関核で,

$$K_2(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) = \tilde{K}_2(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) - \Phi_2(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) \quad (5.4)$$

ただし

$$\tilde{K}_2(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) = \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda(\tau_1 - \tau_2)} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) \quad (5.5)$$

$$\Phi_2(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty d\lambda e^{-\lambda(\tau_1 - \tau_2)} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) & \tau_1 < \tau_2 \\ 0 & \tau_1 \geq \tau_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

となる. これが droplet の場合の界面高さの 2 点同次分布のスケーリング極限である. これは Airy 過程と呼ばれる過程で, 時間依存 GUE ランダム行列 (Dyson のブラウン運動の GUE 版) の最大固有値の運動のスケーリング極限と等しい.

6 半無限系と Pfaffian Schur process

これまで PNG 模型は空間的に x 軸の正負両方向に無限の系を考えて来たが, 半無限系を考えることも出来る. 原点での核生成の確率を $\mathbb{P}[w_{i,i} = k] = (1 - \gamma\sqrt{q})(\gamma\sqrt{q})^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ととる. ただし $0 < \gamma < 1/\sqrt{q}$. この場合原点での高さ分布としては GOE, GSE の最大固有値の分布が現れる [16]. また多点分布に関しても [4] の方法を拡張することにより [17] で調べられており, その結果界面の揺らぎは, スケーリング極限において, 最初 GOE や GSE でスタートして段々 GUE へと転移してゆくランダム行列の最大固有値の運動 [18] と同じであることが示された.

次にこの問題は Schur process の枠組で理解できるのかという疑問が湧くが, Borodin-Rains は [11] の中で, 今度は Schur process そのものではなく, Pfaffian Schur process と呼ばれるものを考えるのがよいということを示した. その weight は

$$\text{const.} \tau_{\lambda(1)}(\rho_0^+) s_{\lambda(1)/\mu(1)}(\rho_1^-) s_{\lambda(2)/\mu(1)}(\rho_1^+) \cdots s_{\lambda(T)/\mu(T-1)}(\rho_{T-1}^+) s_{\lambda(T)}(\rho_T^-) \quad (6.1)$$

という形に書くことが出来るようなものである. ただし $\tau_\lambda = \sum_{\kappa': \text{even}} s_\lambda$. この場合 Schur process の場合よりは面倒になるが, 逆行列の計算を含め同様の計算を進めることが可能である. 相関関数を記述する相関核は幾分複雑となるが, 以下のような 2×2 の行列構造をもったもので与えられる:

$$K(i, u; j, v) = \begin{bmatrix} K_{11}(i, u; j, v) & K_{12}(i, u; j, v) \\ K_{21}(i, u; j, v) & K_{22}(i, u; j, v) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

ただし

$$K_{11}(i, u; j, v) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{z-w}{(z^2-1)(w^2-1)(zw-1)} \frac{H(\rho_{[i,T]}^-; z)H(\rho_{[j,T]}^+; w)}{H(\rho_{[1,T]}^- \cup \rho_{[0,i]}^+; z^{-1})H(\rho_{[1,T]}^- \cup \rho_{[0,j]}^+; w^{-1})} \frac{dzdw}{z^u w^v}, \quad (6.3)$$

$$K_{12}(i, u; j, v) = -K_{21}(j, v; i, u) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{z-w}{(z^2-1)(w^2-1)w} \frac{H(\rho_{[i,T]}^-; z)H(\rho_{[1,T]}^+ \cup \rho_{[0,j]}^-; w)}{H(\rho_{[1,T]}^- \cup \rho_{[0,i]}^+; z^{-1})H(\rho_{[j,T]}^-; w^{-1})} \frac{dzdw}{z^u w^v}, \quad (6.4)$$

$$K_{22}(i, u; j, v) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{z-w}{zw(1-zw)} \frac{H(\rho_{[1,T]}^- \cup \rho_{[0,i]}^+; z)H(\rho_{[1,T]}^- \cup \rho_{[0,j]}^+; w)}{H(\rho_{[i,T]}^-; z^{-1})H(\rho_{[j,T]}^+; w^{-1})} \frac{dzdw}{z^u w^v}. \quad (6.5)$$

Schur process の時と同様に, これで $\rho_i^+ = (a_{i+1}, 0, \dots)$, $\rho_i^- = (b_{2N-i}, 0, \dots)$, $a_i = b_j = \sqrt{q}$ とした特別な場合は, [17] で得られた相関核と本質的に同じものであることがわかる.

7 おわりに

本稿では, PNG 模型の話から始めて Schur process および Pfaffian Schur process を導入し, その性質が Schur 関数の「良い」性質を用いることで詳しく調べられることを用いて PNG 界面の高さ揺らぎに関する結果を得ることが出来ることを解説した. 細かい点はかなり省略してしまったが, 一見全く関係無い PNG 模型と Schur 関数が, 実はかなり本質的な形で関係している事の雰囲気は分って頂けたのではないかと思います. 今後もこの関係の解明がさらに深められ, 表現論的組合せ論やそれに付随する関数等を使うことで物理系の性質の解明が進み, さらに望むべくはそのような過程の中から逆に表現論的組合せ論に新たな進展がもたらされることを期待している.

参考文献

- [1] M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56:889–892, 1986.
- [2] J. Krug and H. Spohn. Kinetic roughening of growing interfaces. In C. Godrèche, editor, *Solids far from Equilibrium: Growth, Morphology and Defects*, pages 479–582, 1992.
- [3] 上羽牧夫, 結晶成長のしくみを探る -その物理的基礎-, 共立出版 (2002).
- [4] K. Johansson. Discrete polynuclear growth and determinantal processes. *Com. Math. Phys.*, 242:277–329, 2003.

- [5] H. Rost. Non-equilibrium behavior of a many particle process: Density profile and local equilibria. *Zeitschrift f. Warsch. Verw. Gebiete*, 58:41–53, 1981.
- [6] K. Johansson. Shape fluctuations and random matrices. *Commun. Math. Phys.*, 209:437–476, 2000.
- [7] 笹本智弘, 1次元非対称単純排他過程の厳密解, 物性研究, 79:881–925, 2003.
- [8] C. A. Tracy and H. Widom. Level-spacing distributions and the Airy kernel. *Commun. Math. Phys.*, 159:151–174, 1994.
- [9] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics 2*. Springer, 1999.
- [10] M. Prähofer and H. Spohn. Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process. *J. Stat. Phys.*, 108:1071–1106, 2002.
- [11] A. Borodin and E. M. Rains. Eynard-Mehta theorem, Schur process and thier Pfaffian analogs, math-ph/0409059.
- [12] A. Okounkov and N. Reshetikhin. Correlation functions of Schur process with applications to local geometry of a random 3-dimensional young diagram. *J. Amer. Math. Soc.*, 16:581–603, 2003.
- [13] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford, 1995.
- [14] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Elsevier, 3rd edition, 2004.
- [15] C. A. Tracy and H. Widom. Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices. *J. Stat. Phys.*, 92:809–835, 1998.
- [16] J. Baik and E. M. Rains. Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources. *J. Stat. Phys.*, 100:523–541, 2000.
- [17] T. Sasamoto and T. Imamura. Fluctuations of the one-dimensional polynuclear growth model in half-space. *J. Stat. Phys.*, 115:749–803, 2004.
- [18] P. J. Forrester, T. Nagao and G. Honner. Correlations for the orthogonal-unitary and symplectic transitions at the hard and soft edges. *Nucl. Phys. B*, 553:601–643, 1999.